

Inhoudsopgave

1 Passer en Liniaal (P.e.L.)	9
1.1 Inleiding	10
1.2 Downloaden - installeren	10
1.3 Het scherm	10
1.4 Een voorbeeld	11
1.4.1 Middelloodlijnen van een driehoek construeren	11
1.4.2 Constructie van drie punten	12
1.4.3 Lijnstukken	13
1.4.4 Eigenschappen	14
1.4.5 Midden van de drie zijden	17
1.4.6 Loodlijnen	18
1.5 Opbouw van een constructie	18
1.6 De omcirkel	19
1.7 Constructievoorbeelden stap voor stap	19
1.7.1 Vierkant	19
1.7.2 Lindmayer-fractaal	21
2 Mathematische modellen voor lineaire programmering	25
2.1 Voorbeeld 1: Winstmaximalisatie	26
2.1.1 Probleemstelling	26
2.1.2 Wiskundig model	26
2.1.3 Verzameling van alle geldige combinaties	27
2.1.4 De doelfunctie	32
2.1.5 Grafische oplossing	33
2.1.6 Oplossing	35
2.2 Lineaire programmering: Overzicht	36
2.3 Voorbeeld 2: Kostenminimalisatie	38
2.3.1 Opstellen van het model	38
2.3.2 Verzameling geldige oplossingen	38
2.3.3 Doelfunctie (isokostenfunctie)	39
2.3.4 Oplossing	39
2.4 De hoekpuntmethode	42
2.4.1 Fundamentele stelling van de lineaire programmering	42
2.4.2 Voorbeeld 1 met de hoekpuntmethode	42
2.5 Uitzonderlijke situaties	44
2.5.1 Géén punten in de geldige oplossingenverzameling	44
2.5.2 Meer dan één optimaal punt	44
2.5.3 Onbegrensde oplossingenverzameling bij maximalisatie	44
2.6 Meerdere onbekenden	45
2.7 Oefeningen	46

2.7.1	Herhalingsvragen	46
2.7.2	Opgaven	46
3	Funcities: Overzicht	51
3.1	Definities	52
3.1.1	Reële functies	52
3.1.2	Het domein van een functie	52
3.1.3	De beeldverzameling van een functie	53
3.1.4	Nulpunt van een functie	53
3.1.5	Het teken van een functie: + of –	53
3.1.6	Stijgen en dalen van een functie	53
3.2	Algebraïsche functies	55
3.2.1	Veeltermfuncties	55
3.2.2	Rationale functies	56
3.2.3	Irrationale functies	56
3.3	Vergelijkingen oplossen	58
3.3.1	Inleiding	58
3.3.2	Veelterm- en rationale vergelijkingen	58
3.4	Oplossen van ongelijkheden	60
3.4.1	Algemene werkwijze	60
3.4.2	Voorbeeld	60
3.5	Irrationale vergelijkingen	63
3.6	Oefeningen	65
3.6.1	Herhalingsvragen	65
3.6.2	Opgaven	65
4	Propositie logica en boolese algebra	69
4.1	Propositie logica	70
4.1.1	Proposities	70
4.1.2	Waarheidstabellen	71
4.1.3	Tautologieën of wetten	72
4.1.4	Propositie logica en digitale systemen	73
4.2	Boolese Algebra	75
4.2.1	Definitie	75
4.2.2	Propositie logica is een Boolese Algebra	78
4.2.3	Dualiteit	78
4.2.4	Eigenschappen in een Boolese Algebra	78
4.2.5	Boolese functies - Schakelfuncties	79
4.3	Minimalisatie van Boolese functies	81
4.3.1	Inleiding	81
4.3.2	Standaardvormen van Boolese functies	81
4.3.3	Functies beschrijven d.m.v. mintermen of maxfactoren	84
4.3.4	Oefeningen	86
4.3.5	Karnaugh-afbeeldingen	87
4.3.6	Vereenvoudiging van som van producten	95
4.4	Oefeningen logica	100
4.5	Oefeningen Boolese Algebra	101
4.6	Vereenvoudigen via Karnaugh-afbeeldingen	102

5	Exponentiële en logaritmische functies	105
5.1	Exponentiële functies	106
5.1.1	Inleiding	106
5.1.2	Definitie van exponentiële functie	106
5.1.3	Eigenschappen van de exponentiële functie met $g > 1$	107
5.1.4	Eigenschappen van de exponentiële functie met $g < 1$	108
5.1.5	Opmerkingen	109
5.2	Logaritmische functie	110
5.2.1	Inleiding	110
5.2.2	Definitie van de logaritmische functie \log_g	110
5.2.3	Verloop van de logaritmische functie met $g > 1$	111
5.2.4	Verloop van de logaritmische functie met $0 < g < 1$	112
5.2.5	Rekenregels	113
5.3	Exponentiële vergelijkingen	114
5.3.1	Voorbeeld 1	114
5.3.2	Voorbeeld 2	115
5.3.3	Voorbeeld 3	116
5.3.4	Voorbeeld 4	118
5.4	Logaritmische vergelijkingen	119
5.4.1	Voorbeeld 1	119
5.4.2	Voorbeeld 2	119
5.5	Oefeningen	121
5.5.1	Herhalingsvragen	121
5.5.2	Opgaven	121
6	Exponentiële groeiprocessen	123
6.1	Exponentiële en lineaire groei	124
6.1.1	Lineaire groei	124
6.1.2	Exponentiële groei	124
6.1.3	Vergelijking van de twee groeiprocessen	125
6.2	Exponentiële groei	127
6.2.1	Definities	127
6.2.2	Stijgend groeiproces	128
6.2.3	Dalend groeiproces	130
6.2.4	Samenvatting	131
6.3	Verdubbelingstijd en halveringstijd	132
6.3.1	Stijgend groeiproces: verdubbelingstijd t_v	132
6.3.2	Dalend groeiproces: halveringstijd t_h	133
6.4	Oefeningen	135
6.4.1	Herhalingsvragen	135
6.4.2	Opgaven	135
7	Rijen en financiële toepassingen	139
7.1	Voorbeelden en definitie	140
7.1.1	Voorbeelden	140
7.1.2	Definitie	140
7.1.3	Voorbeeld: enkelvoudige en samengestelde intrest	141
7.2	Rekenkundige rij (RR)	142
7.2.1	Definitie	142
7.2.2	Algemeen element van de rekenkundige rij	142

7.2.3	Opgave	142
7.2.4	De partieelsom van een rekenkundige rij	143
7.2.5	Het rekenkundig gemiddelde van 2 getallen	143
7.3	Meetkundige rij (MR)	144
7.3.1	Definitie	144
7.3.2	Algemeen element van de meetkundige rij	144
7.3.3	Partieelsom van een meetkundige rij	145
7.3.4	Opmerking	145
7.3.5	Het meetkundig gemiddelde van 2 getallen	146
7.4	Rijen en financiële algebra	147
7.4.1	Werkelijke rente en schijnbare rente	147
7.4.2	Belangrijke principes uit de financiële algebra	148
7.4.3	Toepassing: teruggaan in de tijd	148
7.4.4	Toepassingen op de somformule T_n voor MR	149
7.4.5	Aflossingsschema	153
7.5	Oefeningen	156
7.5.1	Rekenkundige en meetkundige rijen	156
7.5.2	Samengestelde intrest	157
7.5.3	Financiële algebra	159
8	Introductie in Euler	163
8.1	Inleiding	164
8.2	Eenvoudige bewerkingen uitvoeren	164
8.2.1	Rekenen in Euler	164
8.2.2	Het aantal beduidende cijfers	165
8.2.3	Werken met variabelen	166
8.2.4	Vectoren	166
8.2.5	Werken met functies	167
8.2.6	Vergelijkingen numeriek oplossen	168
8.3	Werken met grafieken	169
8.3.1	De grafiek van een functie tekenen	169
8.3.2	Meerdere functies op één grafiek tekenen	170
8.3.3	Functies tekenen met <code>xplot</code>	170
8.3.4	Opvragen van coördinaten van een punt	171
8.4	Programmeren in Euler	171
8.4.1	Werken met functies	171
8.4.2	De elementen van een vector verwerken	172
8.4.3	Meerdere waarden als resultaat van een functie	173
8.4.4	Verschillende soorten lussen	174
8.4.5	Parameter magic	175
8.4.6	Debugging	176
8.4.7	Meer informatie?	176

1

Passer en Liniaal (P.e.L.)

*Nu begon de Rode Koningin weer. 'Kun je nuttige vragen beantwoorden?' zei ze.
'Hoe wordt brood gemaakt?'*

'Dat weet ik!' riep Alice gretig. 'Je neemt een hoeveelheid bloem—'

'Waar pluk je de bloem?' vroeg de Witte Koningin. 'In een tuin of in het wild?'

'Maar die wordt helemaal niet geplukt,' legde Alice uit, 'die wordt gemalen—'

*'Hoeveel malen wordt de bloem gemalen?' zei de Witte Koningin. 'Laat toch niet
zoveel dingen weg.'*

Uit 'Achter de spiegel' – Lewis Carroll

1.1 Inleiding

Deze tekst geeft je een kort overzicht van het *basisgebruik* van 'Passer en Liniaal' (kort: 'P.e.L.'). In een overzicht op papier gaat echter wel een van de basisprincipes van dit soort van software verloren, met name het dynamisch karakter van constructies. In plaats van een constructie waar je punten kan verslepen, hou je enkel een statische figuur over.

We vinden het toch zinvol om je deze tekst mee te geven. Via een uitgewerkt eenvoudig voorbeeld tonen we je de meest voorkomende acties in P.e.L. Hier staat met andere woorden het *programma* centraal en niet de meetkunde die we ermee zullen bedrijven. Voor de meetkundige toepassingen verwijzen we naar de site van de auteur René Grothmann (<http://www.renegrothmann.de>) en naar de site van het vak wiskunde (<http://wiskunde.rega.be>).

1.2 Downloaden - installeren

Je downloadt het programma van de site van Grothmann. Afhankelijk van je besturingssysteem (Windows, Mac, Linux) zijn er verschillende mogelijkheden om het te installeren. Het programma werkt in principe op elk besturingssysteem, op voorwaarde dat er een versie van Java aanwezig is op je computer. De software is volledig open en gratis. Je kan de broncode bekijken en aanpassen als je dat zou willen.

P.e.L. herkent je systeeminstellingen en gebruikt de passende taal (indien aanwezig). Maar zelfs als je een anderstalig systeem hebt, blijft het mogelijk om P.e.L. op te starten met Nederlandse menu's en helpsysteem.

Alle technische details vind je zowel in het Duits als in het Engels op de site van de auteur van het programma (<http://www.renegrothmann.de>)

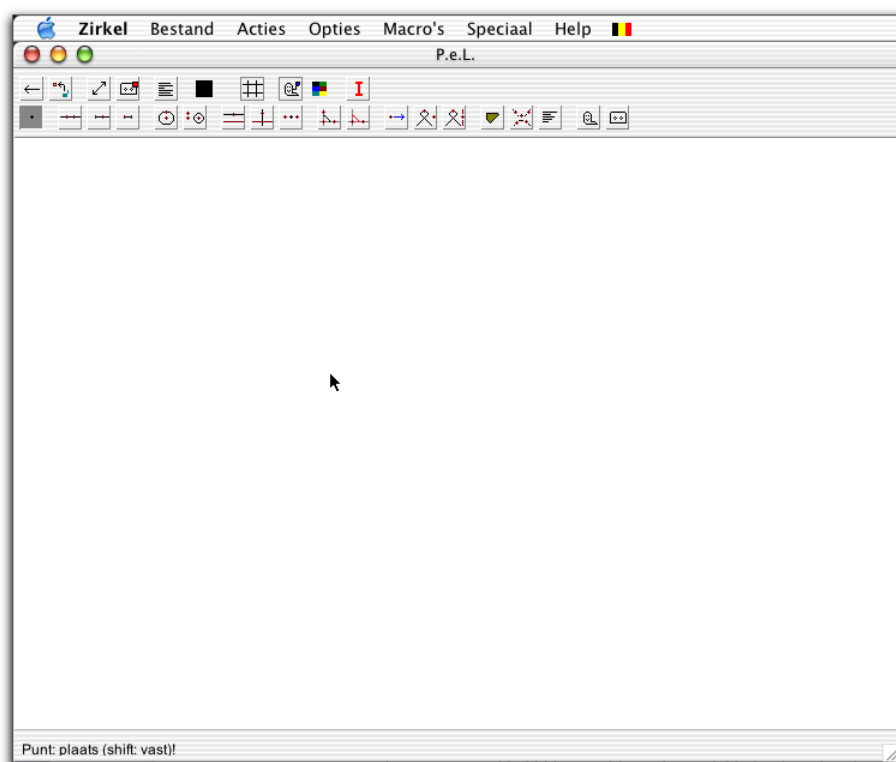
1.3 Het scherm

Figuur 1.1 toont het opstartscherm. Je kan vier delen onderscheiden (van boven naar onder¹):

1. Programmamenu's;
2. de iconenbalk;
3. het tekenvenster;
4. de statusbalk.

We merken op dat de iconenbalk een *beperkt aantal iconen* toont. Er zijn er zeker dubbel zoveel. Standaard start het systeem echter in *beginnersmodus* op. Je krijgt dan enkel de meest voorkomende iconen te zien. Het is een goed idee om eerst een tijdje te wennen aan de beginnersmodus, en deze dan uit te zetten (via de opties) als je vertrouwd bent met het programma. Je kan trouwens alles in P.e.L. uitvoeren zonder iconen, via de gewone menu's of via sneltoetsen ('shortcuts').

¹Het is ook mogelijk om de iconenbalk onder het tekenvenster te zetten. Deze instelling kies je via de opties.



Figuur 1.1: Basisscherm van P.e.L.

Het tekenvenster is de plaats waar de constructie vorm krijgt. Soms kan het nodig zijn om eerst te klikken in dit venster, zodat het *in focus* komt.

De statusbalk is de plaats waar het programma aan de gebruiker laat weten wat het als invoer verwacht².

1.4 Een voorbeeld

1.4.1 Middelloodlijnen van een driehoek construeren

We werken stapsgewijs volgende opgave uit. Construeer de middelloodlijnen van een willekeurige driehoek. Als de constructie klaar is, gaan we op zoek naar een eigenschap van deze drie middelloodlijnen door één van de punten van de driehoek te verplaatsen.

We gebruiken dit voorbeeld om een aantal principes te illustreren. Een grafisch hoogstaand eindresultaat is iets minder onze bekommernis³.

²In de zogenaamde *beschrijvende modus* doet dit vak dienst als invoervak. Meer over deze (snelle) manier van werken vind je op <http://wiskunde.rega.be>

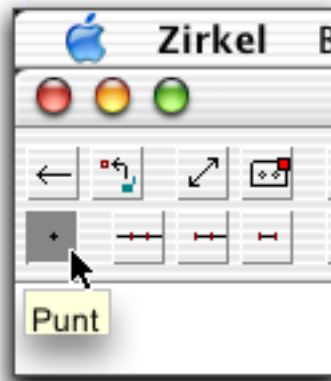
³Bij een 'echte' constructie moet de grafische kwaliteit *wel* een belangrijk streefdoel zijn. Lijndikte, kleur, benaming, puntsoorten,... kunnen allemaal bijdragen om de constructie zo duidelijk en aantrekkelijk mogelijk te maken.

1.4.2 Constructie van drie punten

Alle softwareprogramma's voor dynamische meetkunde hebben met elkaar gemeen dat je eerst een *constructiewerktuig* moet selecteren. Het geselecteerde gereedschap verwacht dan bepaalde invoer van de gebruiker.

Ook punten moet je 'construeren'. Kies het puntwerktuig⁴. Dat kan op drie manieren:

1. Klik op het icoon van het puntwerktuig;



Figuur 1.2: Selectie via het icoon

2. kies via het menu Acties→Punten→Punt;



Figuur 1.3: Selectie via het menu

3. De meeste werktuigen hebben een sneltoets. In het menu (zie puntje 2 hierboven) vind je als sneltoets de 'p' voor punt⁵.

Na de selectie staat het icoontje van het puntwerktuig met een donkergrijze achtergrond in de iconenbalk. Het eerste wat je dan doet is de tekst in het statusvenster (onderaan) bekijken. Hier geeft P.e.L. aan wat er als invoer verwacht wordt. Bvb. in het geval van een punt, staat er 'Punt: plaats (Shift: vast)!'.

⁴We gaan even uit van de veronderstelling dat dit werktuig niet het huidige geselecteerde werktuig is. Het geselecteerde werktuig heeft in de iconenbalk een donkergrijze achtergrond.

⁵Meestal is de sneltoets de eerste letter van de Nederlandse benaming van het werktuig, bvb. 'r' voor rechte, 'l' voor lijnstuk, 'i' voor intersectie,...

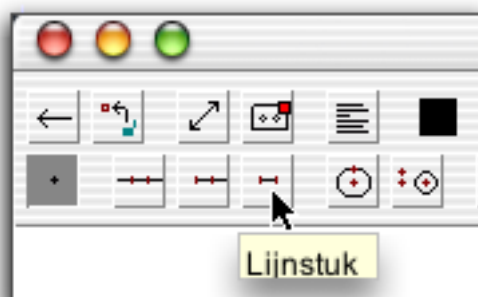
cryptische omschrijving kan je vertalen als: “Je hebt het puntwerktuig geselecteerd. Ik verwacht nu dat je ergens in het tekenvenster een punt plaatst met de muis. Als je de Shift-toets ingedrukt houdt terwijl je het punt plaatst, maak je een vast punt dat niet meer kan verplaatst worden”.

Construeer nu drie verschillende punten.

1.4.3 Lijnstukken

Om een driehoek te maken, moet je de drie punten verbinden met lijnstukken. Hiervoor bestaat er een apart werktuig: het *lijnstukwerktuig*. Net zoals bij het puntwerktuig zijn er drie manieren om het te selecteren:

1. Klik op het icoon van het lijnstukwerktuig;



Figuur 1.4: Icoon voor lijnstukwerktuig

2. kies via het menu Acties→Rechten→Lijnstuk;
3. gebruik de sneltoets '1'.

Na de selectie van dit werktuig verandert de tekst in het statusvenster in ‘Lijnstuk: eerste punt?’ P.e.L. verwacht dat je het eerste punt van het lijnstuk aanduidt. Ga naar één van de punten met de muis. Als je dicht genoeg in de buurt van het punt met de muisaanwijzer gaat staan, verandert het punt van kleur. Dit betekent dat P.e.L. dit punt herkent als een geldige kandidaat. Klik op het punt om het selecteren.

Je kan ook klikken op een *vrije ruimte*. P.e.L. zal opmerken dat je niet in de buurt van een bestaand punt geklikt hebt en een nieuw punt aanmaken op de plaats waarop je klikte. Opgelet: dit een belangrijke bron van fouten! Meer dan eens gebeurt het dat je denkt op een bestaand punt geklikt te hebben, maar dat je in feite het punt net miste door het onnauwkeurig aan te wijzen. P.e.L. plaatst dan een nieuw punt heel dichtbij het punt dat je eigenlijk wou aanwijzen. Daarom deze raad: *wacht altijd tot het punt dat je wil aanduiden van kleur verandert*. Pas dan ben je zeker dat P.e.L. het herkent als een punt dat kan gekozen worden voor het huidige werktuig.

Als alles in orde is verandert de tekst in het statusvak nu in ‘Lijnstuk: tweede punt (Shift: vaste lengte)?’ Vertaling in het Nederlands: “We werken nog steeds met het lijnstukwerktuig. Duid nu een tweede punt aan als eindpunt

voor het lijnstuk. Als je de Shift-toets ingedrukt houdt bij het selecteren van een tweede punt, krijg je een speciaal lijnstuk met vaste grootte". Op deze voorwerpen met een vaste grootte komen we later terug.

Duid het tweede punt aan (wacht op kleurverandering) en klik met de muis. Het lijnstuk wordt geconstrueerd. Merk op dat de tekst in het statusvak terug verandert naar de tekst van daarnet (eerste punt). *Zolang je geen ander werktuig kiest, blijft het huidige werktuig van kracht.* Construeer nu de andere lijnstukken, tot de driehoek af is.

1.4.4 Eigenschappen

Elk voorwerp dat je construeert wordt bewaard met een aantal standaard-eigenschappen, zoals kleur, lijndikte, zichtbaarheid, benaming, grootte,... Er zijn twee manieren om die eigenschappen te veranderen:

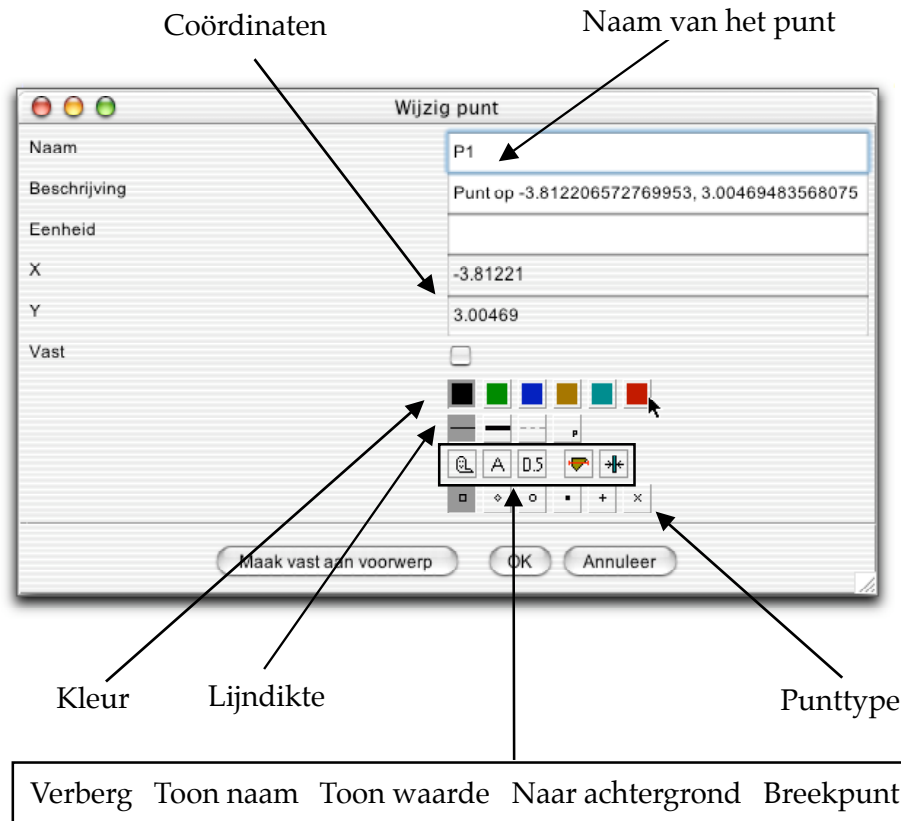
1. Het gemakkelijkste is dat je *op voorhand* (vóór de constructie van het voorwerp) nadenkt over de gewenste kleur, lijndikte,... en die standaardwaarden aanpast. Deze manier van werken illustreren we in een volgend puntje.
2. Het is echter ook mogelijk om de eigenschappen van een reeds geconstrueerd voorwerp *achteraf* te wijzigen. Ook dit kan op verschillende manieren:
 - (a) Klik op het icoon van het 'wijzigwerktuig'. Opgelet: dit icoon krijg je niet te zien in de beperkte iconenbalk van de beginnersmodus. Om ook dit icoon te kunnen kiezen, moet je de beginnersmodus eerst uitschakelen. Dit kan via het menu: Opties→Beginnersmodus.
 - (b) Kies via het menu Acties→Wijzig laatste voorwerp. Zoals de omschrijving het aangeeft, kan je hiermee *enkel het voorwerp dat je net construeerde*, wijzigen.
 - (c) De snelste manier om de eigenschappen van een voorwerp te wijzigen is rechtsklikken⁶ op het voorwerp

Laten we de eigenschappen van een punt bekijken. Klik met de rechtermuisknop op één van de punten. Er opent een venstertje met een aantal iconen en vakken waarin tekst of getallen ingevuld zijn. Figuur 1.5 toont dit eigenschappendialoogvenster. Per voorwerp is dit venster licht verschillend (een rechte heeft bvb. een paar andere eigenschappen dan een cirkel), maar de basisstructuur is altijd hetzelfde. Daarom bekijken we dit voorbeeld meer in detail.

Benaming – beschrijving

P.e.L. geeft elk voorwerp een *standaardnaam*. In ons voorbeeld merk je in het eigenschappenvenster dat punten benoemd worden met een 'P' gevolgd door

⁶Op Mac wordt dat Command (appeltje-toets) + klikken als je maar over één muisknop beschikt.



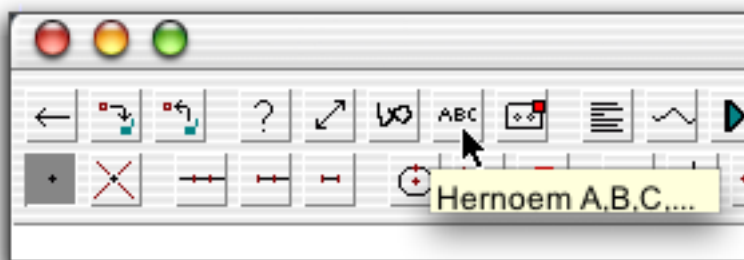
Figuur 1.5: Eigenschappen van een punt

een volgnummer. Bij lijnstukken is dat een 'l' met een nummer, snijpunten (intersecties) krijgen als naam een 'I' met een nummer, enz. Voor veel voorwerpen is deze naamgeving prima en is er weinig reden om dat aan te passen.

Voor onze driehoek echter zou het aangenaam zijn als we de 'normale' manier van werken zouden kunnen gebruiken: hoekpunten A, B en C. Via het eigenschappendialogvenster is dat heel simpel. Je klikt in het vakje van de naam en vult de gewenste naam in. Herhaal dit voor de drie punten.

Dit is natuurlijk repetitief werk. Zeker als je de punten van een zeshoek moet benoemen wordt het eentonig. Daarom heeft P.e.L. een speciaal commando om dit proces te *automatiseren*: Acties \rightarrow Hernoem A, B, C (wat is de sneltoets?). Als je dit werktuig kiest, verwacht (zie statusvak!) P.e.L. dat je een voorwerp aanklikt. Als je op een punt klikt, zoekt het programma naar de eerste letter die nog niet benomen is, bvb. de 'A'. Een ander punt aanklikken, levert 'B' als benaming, enz. Bij lijnstukken krijg je a, b, c, ... en voor hoeken levert dit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Onder de benaming vind je in het dialoogvenster een vak 'beschrijving'. Ook hierin komt eens standaardtekst die je kan vervangen door een willekeurige andere tekst.



Figuur 1.6: Icoon voor herbenoemen

Coördinaten

P.e.L. laat je blijkbaar toe om vrij in een tekenvenster meetkundige figuren te construeren. Die figuren worden in het programma echter vertaald in getallen, vergelijkingen, coördinaten.

Vaak heb je geen nood aan dit inwendig coördinatensysteem. Voor sommige toepassingen is het wel zinvol dat je met exacte coördinaten werkt. Je kan het raster tonen via *Opties*→*Toon raster* (ga zelf op zoek naar de sneltoets en het bijhorend icoon). Je merkt dat het rastericoon een donkergrijze achtergrond krijgt (met andere woorden: geselecteerd is). Dit is een voorbeeld van een instelling die *voor de hele figuur* van toepassing is (en niet alleen voor een welbepaald voorwerp).

In het eigenschappenvenster kan je van elk punt de x - en de y -coördinaat zelf invoeren. Bevestig je keuze en het punt zal opnieuw getekend worden op de coördinaten die je invulde.

Als het raster 'aan' staat doen de rasterlijnen dienst als *magneten*. Als je een nieuw punt maakt, wordt dat altijd op een speciale plaats gezet. Experimenteer er maar eens mee. De magnetische werking van dit raster is gemakkelijker te ervaren dan in een tekst uit te leggen.

In onze constructie brengen de rasterlijnen weinig bij, dus we zetten ze uit. Vooraleer we dat doen, onderzoek je best nog even het effect van de pijltjestoetsen en van de '+' en de '-' toetsen. Soms is een figuur te klein of te groot, of valt ze een stuk buiten het venster. Met deze toetsen kan je de figuur verkleinen of vergroten en verschuiven⁷.

Maar — zoals gezegd — we zetten het rastersysteem af voor de rest van onze constructie.

Visuele kenmerken

We gaven het hiervoor al aan. Bepalend voor het eindresultaat is zeker en vast ook een *oordeelkundig gebruik van kleur, puntsoort, lijndikte, naamgeving,...*

⁷Eigenlijk is dat niet echt correct geformuleerd. De figuur blijft staan, maar het onderliggend coördinatensysteem wordt aangepast. Je kan het ook als volgt bekijken. De constructie wordt op een heel groot blad papier gemaakt. Jij krijgt enkel een klein stuk van dat tekenpapier te zien, door een venster. Dit venster kan je verschuiven over het tekenblad en je kan er een vergrootglas (of verkleinglas) voor zetten.

In het eigenschappenvenster kan je voor elk voorwerp apart deze eigenschappen instellen. Experimenteer met deze instellingen. Je kan eigenlijk niets fout doen en de meeste dingen zijn voor de hand liggend.

Alleen de 'Verberg' optie vraagt een woordje uitleg. Deze mogelijkheid om voorwerpen niet te laten zien op het scherm — ook al zijn ze wel nog aanwezig in de constructie — is absoluut onmisbaar voor meer *complexe constructies*. Tenzij je heel wat tussenstappen onzichtbaar maakt, zie je op den duur door de bomen het bos niet meer.

Op zich is het een simpele optie. Je duidt bij een voorwerp bij de eigenschappen aan dat het verborgen mag worden. Als je je later zou bedenken, kan je het 'verberg' icoontje 'uit' zetten. Het probleem is natuurlijk dat je moeilijk een voorwerp kan selecteren (door er rechts op te klikken) dat je niet meer kan zien. De oplossing vind je in het menu: `Opties`→`Toon verborgen voorwerpen` (zoek de sneltoets: bij langere constructies zal je die regelmatig nodig hebben). Net zoals bij het raster is dit ook een optie die voor heel de constructie geldig is, tot je ze uitzet. Verborgen voorwerpen worden in een lichte tint getekend. Je kan nu de eigenschappen van het verborgen voorwerp dat je weer wil tonen, wijzigen (bvb. door rechtsklikken). Zet in het eigenschappendialoogvenster de optie 'verberg' uit. Je kan nu in het hoofdmenu `Opties`→`Toon verborgen voorwerpen` terug uitzetten.

1.4.5 Midden van de drie zijden

Na de (toch wel belangrijke) uitwijding hierboven keren we terug naar ons voorbeeld. We hebben al de driehoek getekend en de drie hoekpunten A, B en C genoemd. Deze namen zijn zichtbaar op de constructie. De namen van de lijnstukken worden niet getoond.

Volgende stap: middelloodlijnen tekenen. Er is echter geen 'middelloodlijn' werktuig⁸. We werken daarom in twee stappen en zoeken eerst de middens van de zijden.

Het verhaal ken je stilaan. Je selecteert het 'midden' werktuig (via het menu, via een icoon of via een sneltoets) en werpt een blik op het statusvak links-onder. Als daarin de tekst 'Middelpunt: eerste punt?' verschijnt, zit je goed.

Dit keer proberen we slim te zijn. *Vooraleer* de middens te construeren, denken we even na hoe we die getoond willen zien. Nemen we bvb. dat we ze in het rood, met een bolletje en voorzien van de standaardbenaming willen tonen. Hierboven zag je reeds hoe je na de constructie nog eigenschappen kan veranderen. Als je echter op voorhand weet wat je wil, is het efficiënter om het op voorhand te bepalen.

In wat volgt werken we via het menu. Ook hier kan je de selectie via de iconen doen. Denk er wel aan dat deze instellingen blijven gelden voor alle voorwerpen die je vanaf nu construeert. Kies in het menu achtereenvolgens volgende instellingen:

- `Opties`→`Standaard kleur`→`Rood`
- `Opties`→`Standaard punttype`→`Cirkel`
- `Opties`→`Voorkeuren`→`Toon voorwerpnamen`

⁸Via een macro is het niet moeilijk om dit werktuig zelf te maken

De andere instellingen laten we zoals het is. Merk je in de iconenbalk wat er veranderd is? Construeer nu de middens van de drie zijden.

1.4.6 Loodlijnen

We willen de drie loodlijnen graag in een blauwe stippellijn tekenen. De namen willen we er liever niet bij. Pas de opties in die zin aan. Zoek zelf het loodlijn gereedschap. Kijk in de statusbalk wat P.e.L. van jou verwacht. De volgorde van de invoer is belangrijk: moet je eerst de rechte aanduiden en dan het punt of is het omgekeerd?

1.5 Opbouw van een constructie

Het boeiende aan programma's zoals P.e.L. is dat je de zogenaamde *vrije punten* van de constructie kan verplaatsen. De tekening past zich dan aan aan de nieuwe situatie. We noemen dit het *dynamisch* of het *interactief* karakter van dit soort van meetkundeprogramma's.

In P.e.L. kan je *enkel punten* verplaatsen. Het verschil tussen vrije en niet-vrije punten is in dit opzicht belangrijk. In ons voorbeeld zijn de drie hoekpunten van de driehoek vrije punten. Het zijn punten die we willekeurig ergens in het tekenvenster geplaatst hebben⁹. Een vrij punt kan je met het 'beweeg' werktuig verplaatsen. Dit werktuig kan je op de gebruikelijke manieren selecteren, bvb. via de sneltoets 'b' (zoek zelf hoe je het doet met een icoon of via het menu!). Als je dit werktuig geselecteerd hebt, krijg je feedback van het programma via de statusbalk en via het tekenvenster. Alle vrije (beweegbare) punten worden immers *rood gekleurd* en in het *vet* weergegeven. Klik op zo'n punt, hou de muisknop ingedrukt en verplaats het punt. De hele constructie past zich aan. Tip: *als je de Shift-toets ingedrukt houdt, blijf je de originele tekening zien.*

De middelpunten van de zijden zijn *geen* vrije punten. Hun plaats ligt vast, want ze volgt uit een berekening waar twee vrije punten de invoerparameters zijn.

Tijdens de constructie maak je onvermijdelijk ooit wel eens een *fout*. Als je het laatst geconstrueerde voorwerp wil wissen is het vrij eenvoudig: *Acties*→*Wis laatste voorwerp*. Onthou misschien best ook de sneltoets voor deze bewerking. Je zal immers regelmatig wel eens iets moeten wissen.

Als je *pas na een aantal stappen* merkt dat je in het begin een fout maakte, wordt het iets moeilijker. Je gebruikt hiervoor *Acties*→*Verwijder voorwerp en zijn kinderen*. De klemtoon bij deze actie ligt echt wel op 'en zijn kinderen'. Als je in onze driehoek één van de hoekpunten verwijdert, valt een groot deel van de constructie mee weg (ga eens na wat er allemaal van dit ene punt afhangt). Kalm blijven is de boodschap! Denk eerst eens goed na of je wel het goede voorwerp wil wissen. Als het dan toch fout loopt (en je bent ongeveer heel je constructie kwijt) is de functie '*Acties*→*Maak wissen ongedaan*' (Ctrl-Z) je bondgenoot. *Voorwaarde is wel dat je na je fatale wisbewerking geen andere bewerkingen meer deed.*

⁹Hadden we de Shift-toets ingedrukt gehouden bij het creëren van de punten, dan waren dit vaste punten geweest.

Zoals bij elk computerprogramma neem je natuurlijk je voorzorgen en bewaar je je werk regelmatig.

1.6 De omcirkel

Hoe je ook de driehoek aanpast (door punten te verplaatsen), de middelloodlijnen op de drie zijden gaan altijd door één punt. Dit snijpunt ligt even ver van de drie hoekpunten verwijderd. We kunnen met andere woorden een cirkel tekenen die door de drie hoekpunten van de gegeven driehoek gaat, met als middelpunt het snijpunt van de middelloodlijnen.

Werken met snijpunten is anders in dit soort van programma's dan bij een constructie op papier. Als je op papier twee snijdende rechten tekent met een potlood, heb je automatisch een snijpunt. Bij programma's voor dynamische meetkunde moet je dit snijpunt meestal expliciet aangeven, vooraleer je het kan gebruiken¹⁰. Om snijpunten te construeren beschik je over een apart gereedschap: het 'intersectie' werktuig.

Kies dit werktuig. In de statusbalk merk je dat er verschillende mogelijkheden zijn om het snijpunt te construeren:

1. Je kan de verschillende snijdende voorwerpen één voor één selecteren.
2. Je kan echter ook rechtstreeks op het snijpunt klikken. Soms is dit niet mogelijk omdat je bvb. *alle* snijpunten wilt (bvb. tussen een rechte en een cirkel) of omdat het snijpunt heel dicht bij andere punten ligt.

Hier kan je kiezen welke methode je gebruikt. Construeer het snijpunt.

Om een cirkel te construeren zijn er verschillende mogelijkheden:

- Cirkel met gegeven middelpunt en een punt op de cirkel;
- cirkel met gegeven middelpunt en nog twee andere punten die de straal bepalen;
- cirkel met gegeven middelpunt en een in te voeren lengte als straal.

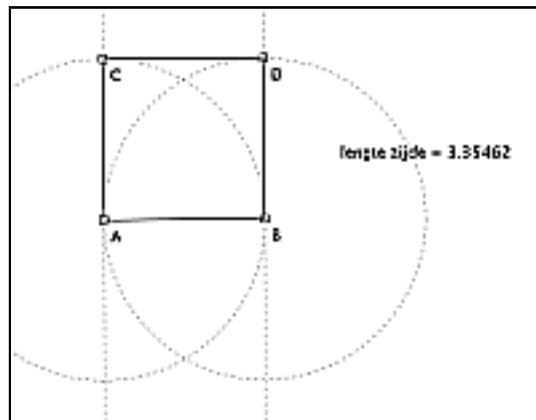
De keuze hangt af van de omstandigheden. Voor deze constructie ligt de eerste optie voor de hand. De statusbalk help je wel verder bij de juiste keuze van de punten (eerst het middelpunt selecteren, en dan één van de hoekpunten van de driehoek).

1.7 Constructievoorbeelden stap voor stap

1.7.1 Vierkant

Teken een vierkant ABCD met een willekeurige zijde.

¹⁰Dit is een vereenvoudiging van hoe je in P.e.L. werkt. Het kan ook zonder dit punt expliciet te benoemen, maar we leggen hier de standaardmanier van werken uit



1. Teken het lijnstuk AB . Gebruik de knop "Hernoem A,B,C " om de uiteinden de correcte naam te geven.
2. Noteer de lengte van het lijnstuk met "Wiskundige uitdrukking". Vul het veld "Beschrijving" in met *lengte zijde* en stel "Wiskundige uitdrukking" gelijk aan $d(A, B)$. Vink zowel "Toon voorwerpenamen" als "Toon voorwerpwaarden" aan.
3. Construeer nu de linkeropstaande zijde als volgt:
 - (a) Maak een loodrechte op AB door het punt A in stippellijn.
 - (b) Teken in stippellijn een cirkel met middelpunt A en straal gelijk aan de afstand $d(A, B)$. Je gebruikt daarvoor het voorwerp "Cirkel met straal r en middelpunt M ". Volg de instructies van de instructiebalk nauwkeurig op.
 - (c) Bepaal het snijpunt van de cirkel en de loodrechte met het voorwerp "Intersectie". Verander eerst de lijndikte.
 - (d) Benoem het bovenste snijpunt C en verwijder het andere snijpunt met "Verwijder voorwerp en zijn kinderen".
 - (e) Teken het lijnstuk AC .
4. Construeer nu de rechteropstaande zijde BD op dezelfde manier als AC .
5. Teken het lijnstuk CD .

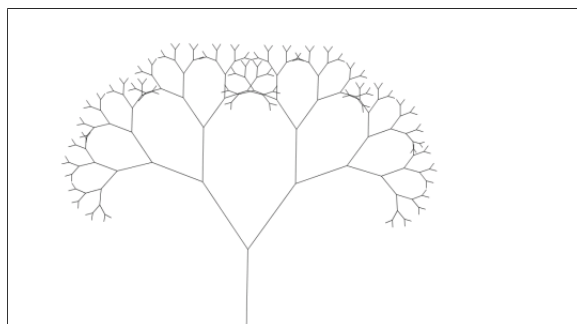
Je hebt nu het vierkant $ABCD$ getekend. Je kan de zijde van het vierkant wijzigen door de punten A of B te slepen met het werktuig "Beweeg punt". Merk op dat de punten C en D niet gesleept kunnen worden. Zij zijn immers *vaste punten*: ze zijn het resultaat van een aantal bewerkingen.

De tekening wordt eleganter als je de hulplijnen verbergt (niet verwijderen!). Je kan ze op de achtergrond zichtbaar maken met "Toon verborgen voorwerpen".

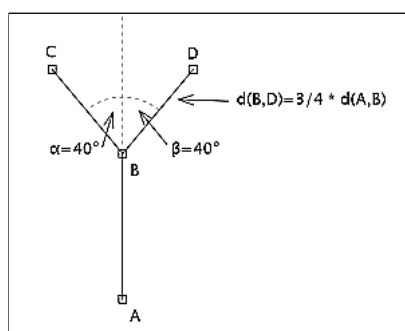
Bewaar je afbeelding. Verwijder dan het punt A . Wat merk je? Zoek een verklaring.

1.7.2 Lindmayer-fractaal

De Lindmayer-fractaal ziet er als volgt uit:



Ze wordt iteratief opgebouwd. Dit wil zeggen: je vertrekt van een stam, en daar teken je twee takken op. Vervolgens beschouw je elk van deze takken opnieuw als stam, en teken je telkens twee (kleinere) takken. De verhouding van de lengte tak - onderliggende tak moet telkens gelijk zijn.



De constructie is wat moeilijker en maakt gebruik van macro's. We beginnen met het tekenen van een stam en zijn twee takken.

1. Construeer het "lijnstuk" AB .
2. Maak in stippellijn de "rechte" r_1 door A en B .
3. Definieer een "punt" hulp op deze rechte, ten noorden van B .
4. Construeer de "vaste hoeken" α en β van 40° met "beginpunt" hulp en "basispunt" B ¹¹.
5. Construeer in stippellijn de "cirkel" c_1 "met vaste straal" $3/4 * d(A, B)$ en middelpunt B .
6. Bepaal de snijpunten C en D van deze cirkel met de hoeken α en β respectievelijk.
7. Teken de lijnstukken BC en BD . Deze lijnstukken zijn de takken op de stam AB .

¹¹Let op de volgorde! Indien je straks problemen hebt bij de macro, kom dan terug naar deze stap.

In feite heb je nu de eerste iteratie van de fractaal getekend. Een fractaal met één iteratie is echter geen fractaal. Op *beide* takken die je getekend hebt, zou je nu opnieuw de ganse constructie moeten hernemen. Dit geeft vier (kleinere) takken, waarop je opnieuw takken moet maken ... Het zal een werk van zeer lange adem zijn.

Het is bijgevolg beter een *macro* te maken. Een macro is in feite een samenraapsel van een aantal opeenvolgende constructies. Eens hij gedefinieerd is, volstaat het één of meerdere beginpunten of -voorwerpen ("*parametervoorwerpen*") aan te duiden. De macro zorgt er dan voor dat het eindresultaat ("*doelvoorwerpen*") getekend worden.

We maken nu de macro *lindmayer* die de stam *AB* als "*parametervoorwerp*" heeft en de takken *BC* en *BD* als "*doelvoorwerpen*". We gebruiken hiertoe bovenstaande constructie.

1. Klik op de knop "*Macro parameters/doelen/definitie*".
2. P.e.L. vraagt "*Macro parameters: parametervoorwerpen?*". Dit zijn de gegevens waarop het uiteindelijke resultaat van je macro gebaseerd zijn. Hier heb je twee mogelijkheden: je zou de punten *A* en *B* kunnen aanklikken, maar ook het lijnstuk *AB* (dat op deze punten gedefinieerd is). Wij kiezen voor de laatste mogelijkheid.
3. Klik opnieuw op de knop "*Macro parameters/doelen/definitie*". Merk op dat de knop verandert, en dat een deel van de constructie verdwijnt¹². P.e.L. vraagt nu "*Macro doelen: doelvoorwerpen?*". Wat moet het resultaat zijn van je macro? Wij willen dat de macro twee takken op de stam *AB* tekent, dus we klikken de lijnstukken *BC* en *BD* aan.
4. Klik een laatste keer op de knop "*Macro parameters/doelen/definitie*". P.e.L. vraagt je nu de "*naam*" van de macro te specificeren. Verder kan je de macro van commentaar voorzien en in het veld "*Vraag naar parameters*" een zinvolle naam invullen (bijvoorbeeld *stam* in plaats van het standaard voorziene *l₁*).
5. Klik op OK en je macro is klaar.

Misschien lukte bovenstaande procedure niet omdat in stap 3 je scherm plots leeg was. De oorzaak hiervan ligt in een foute constructievolgorde. De doelvoorwerpen moeten *volledig* afhankelijk zijn van de parametervoorwerpen. Je mag bijvoorbeeld de hoek van 40° niet definiëren op een rechte die niet door *A* en *B* gaat (maar wel door twee andere punten op het lijnstuk *AB*). Op zicht zal je dezelfde takken krijgen, maar voor P.e.L. maakt het een groot verschil: de takken zijn immers afhankelijk van de nieuwe punten, en niet van *A* en *B*. Vóór je een macro begint zou je de volgende test moeten doen: verwijder de parametervoorwerpen¹³. Indien de doelvoorwerpen niet verdwijnen, is de constructievolgorde fout en zal je ook geen macro kunnen definiëren.

Nu je de macro gemaakt hebt, kan je hem gebruiken.

1. Klik rechts op het scherm en selecteer de macro.

¹²Dit is niet abnormaal! Indien echter de takken *BC* en *BD* ook verdwijnen, heb je de constructie verkeerd gemaakt. Lees meer onder deze werkwijze.

¹³Eerst constructie opslaan!

2. P.e.L. vraagt je naar het parametervoorwerp $stam$. Klik op een tak waar je zijtakken wil.
3. De zijtakken worden getekend.

Het kan zijn dat je een foutief resultaat krijgt, bijvoorbeeld dat de nieuwe takken naar beneden wijzen in plaats van naar boven. Dit is opnieuw te wijzen aan een foute constructievolgorde (bijvoorbeeld het lijnstuk AB construeren van B naar A in plaats van A naar B). Er is maar één oplossing: opnieuw beginnen met de volledige constructie en nu de juiste volgorde aanhouden.